ĐỊNH LÍ ĐIỂM BẤT ĐỘNG CỦA BERINDE CHO ÁNH XẠ HẦU CO TRONG KHÔNG GIAN KIỂU-MÊTRIC

Nguyễn Ngọc Hân
ĐHSTOAN11, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: hannghinguyen02071993@gmail.com

Tóm tắt. *Trong bài viết này, chúng tôi mở rộng và chứng minh định lí điểm bất động của Berinde cho ánh xạ hầu co trong không gian mêtric* (X, d) *[3] sang không gian kiểu-mêtric* (X, D, K) *bằng việc thêm bốn giá trị* $D(T^2x, Tx), D(T^2x, y)$, $D(T^2x, Ty)$, $\dfrac{D(T^2x, x) + D(T^2x, Ty)}{2K}$ *vào điều kiện co. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.*

1 Mở đầu

Lí thuyết điểm bất động trong không gian mêtric được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu trong thời gian qua. Bằng cách thay không gian mêtric bởi không gian mêtric suy rộng và thay điều kiện co bằng điều kiện co tổng quát hơn, rất nhiều định lí điểm bất động đã được thiết lập.

Với nhiều định lí điểm bất động trên không gian mêtric, chúng ta thấy rằng điều kiện co thường chứa tối đa năm giá trị là $d(x, y), d(Tx, x), d(Ty, y), d(y, Tx), d(x, Ty)$, xem [1], [9]. Năm 2014, trong tài liệu [5], P. Kumam và cộng sự đã bổ sung thêm bốn giá trị mới $d(T^2x, x), d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty)$ vào điều kiện co và chứng minh định lí điểm bất động đối với các giá trị này.

Năm 2010, Khamsi đã giới thiệu về không gian kiểu-mêtric, về không gian kiểu-mêtric và định lí điểm bất động trong không gian kiểu-mêtric, độc giả có thể xem [8], [10] và những tài liệu tham khảo trong đó.

Bằng cách tương tự, chúng tôi mở rộng và chứng minh định lí điểm bất động của Berinde cho ánh xạ hầu co trong không gian mêtric (X, d) [3] sang không gian kiểu-mêtric bằng việc thêm bốn giá trị $D(T^2x, Tx), D(T^2x, y), D(T^2x, Ty), \dfrac{D(T^2x, x) + D(T^2x, Ty)}{2K}$ vào điều kiện co. Đồng thời, chúng tôi xây dựng ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Đầu tiên, chúng tôi xin trình bày định nghĩa không gian kiểu-mêtric.

1.1 Định nghĩa ([7], Definition 2.7)**.** Cho X là một tập khác rỗng, $K \geq 1$ và $D : X \times X \longrightarrow [0, \infty)$ là một hàm thỏa mãn các điều kiện sau với mọi $x, z_1, \ldots, z_n, y \in X$.

1. $D(x, y) = 0$ khi và chỉ khi $x = y$.

2. $D(x, y) = D(y, x)$.

3. $D(x, y) \leq K\big[D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + \cdots + D(z_n, y)\big]$.

Khi đó, D được gọi là một *kiểu-mêtric* trên X và (X, D, K) được gọi là một *không gian kiểu-mêtric*.

1.2 Nhận xét. 1. (X, d) là một không gian mêtric khi và chỉ khi $(X, d, 1)$ là một không gian kiểu-mêtric.

2. Trong bài báo [6], Khamsi và Hussain đã giới thiệu một kiểu-mêtric khác, trong đó điều kiện (3) của Định nghĩa 1.1 được thay bởi điều kiện sau với mọi $x, y, z \in X$

$$D(x,y) \le K\big[D(x,z) + D(z,y)\big].$$

Trong bài viết này, chúng tôi xét kiểu-mêtric theo Định nghĩa 1.1.

Khái niệm dãy hội tụ, dãy Cauchy, tính đầy đủ của không gian kiểu-mêtric được định nghĩa như sau.

1.3 Định nghĩa ([7], Definition 2.8)**.** Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric và $\{x_n\}$ là một dãy trong X. Khi đó

1. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là *hội tụ* đến $x \in X$, viết là $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = 0$. Khi đó, x được gọi là *điểm giới hạn* của dãy $\{x_n\}$.
2. Dãy $\{x_n\}$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$.
3. Không gian (X, D, K) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

1.4 Mệnh đề ([2], Mệnh đề 1.1.7)**.** *Cho (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric. Nếu dãy $\{x_n\}$ hội tụ thì giới hạn của nó là duy nhất.*

1.5 Nhận xét ([2], Nhận xét 1.1.5)**.** Trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K), tôpô được hiểu là tôpô cảm sinh bởi sự hội tụ của nó. Điều này có nghĩa là tập G mở trong không gian kiểu-mêtric (X, D, K) khi và chỉ khi với mỗi $x \in G$, mọi dãy $\{x_n\} \subset X$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì tồn tại n_0 sao cho $x_n \in G$ với mọi $n \ge n_0$. Khi đó kiểu-mêtric $D : X \times X \to [0, \infty)$ là liên tục tại (x, y) nếu và chỉ nếu $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi dãy $\{x_n\}, \{y_n\}$ mà $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Suy ra, nếu $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ thì $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y) = D(x, y)$.

2 Kết quả chính

Trước hết, bằng cách thay không gian mêtric bởi không gian kiểu-mêtric và bổ sung thêm bốn giá trị vào điều kiện co, chúng ta có kết quả sau là mở rộng của [3, Theorem 2.2].

2.1 Định lí. *Giả sử (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ thỏa mãn*

1. *D liên tục.*
2. *Tồn tại $\alpha \in [0, \frac{1}{K})$ và $L \ge 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$D(Tx, Ty) \le \alpha M(x,y) + LD(y, Tx). \tag{2.1}$$

Ở đây

$$\begin{aligned} M(x,y) = \max\Big\{& D(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{D(x,Ty) + D(y,Tx)}{2K}, \\ & D(T^2x, Tx), D(T^2x, y), D(T^2x, Ty), \frac{D(T^2x, x) + D(T^2x, Ty)}{2K}\Big\}. \end{aligned}$$

Khi đó:

1. Fix(T) $\neq \emptyset$ *với* Fix(T) $= \{x \in X : Tx = x\}$.

2. *Với mọi* $x_0 = x \in X$, *dãy lặp Picard* $\{x_n\}$ *được cho bởi*

$$x_{n+1} = Tx_n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

hội tụ về $x^* \in$ Fix(T).

3. *Ước lượng sau xảy ra*

$$D(x_{n+i-1}, x^*) \leq \frac{K\alpha^i}{1-\alpha} D(x_{n+i-1}, x_{n-1}), n = 1, 2, 3, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.3}$$

Chứng minh. (1).Với mỗi $x \in X$, xét $\{x_n\}$ là dãy lặp Picard được cho bởi $x_{n+1} = Tx_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ với $x_0 = x$. Với $n = 1, 2, 3, \ldots$, bằng cách thay $x = x_{n-1}$ và $y = x_n$ trong (2.1), ta có

$$\begin{aligned}
D(x_n, x_{n+1}) &= D(Tx_{n-1}, Tx_n) \\
&\leq \alpha M(x_{n-1}, x_n) + LD(x_n, Tx_{n-1}) \\
&= \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, Tx_{n-1}), D(x_n, Tx_n), \\
&\quad \frac{D(x_{n-1}, Tx_n) + D(x_n, Tx_{n-1})}{2K}, D(T^2x_{n-1}, Tx_{n-1}), \\
&\quad D(T^2x_{n-1}, x_n), D(T^2x_{n-1}, Tx_n), \\
&\quad \frac{D(T^2x_{n-1}, x_{n-1}) + D(T^2x_{n-1}, Tx_n)}{2K} \Big\} + LD(x_n, Tx_{n-1}) \\
&= \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), \\
&\quad \frac{D(x_{n-1}, x_{n+1}) + D(x_n, x_n)}{2K}, D(x_{n+1}, x_n), D(x_{n+1}, x_n), \\
&\quad D(x_{n+1}, x_{n+1}), \frac{D(x_{n+1}, x_{n-1}) + D(x_{n+1}, x_{n+1})}{2K} \Big\} + LD(x_n, x_n) \\
&= \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), \frac{D(x_{n-1}, x_{n+1})}{2K} \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Từ Định nghĩa 1.1.(3), ta có

$$D(x_{n-1}, x_{n+1}) \leq K[D(x_{n-1}, x_n) + D(x_n, x_{n+1})].$$

Suy ra

$$\frac{D(x_{n-1}, x_{n+1})}{2K} \leq \frac{D(x_{n-1}, x_n) + D(x_n, x_{n+1})}{2}. \tag{2.5}$$

Từ (2.4) và (2.5) ta có

$$\begin{aligned}
D(x_n, x_{n+1}) &\leq \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), \frac{D(x_{n-1}, x_{n+1})}{2K} \Big\} \\
&\leq \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}), \frac{D(x_{n-1}, x_n) + D(x_n, x_{n+1})}{2} \Big\} \\
&= \alpha \max \Big\{ D(x_{n-1}, x_n), D(x_n, x_{n+1}) \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Nếu tồn tại n sao cho $\max\Big\{D(x_{n-1},x_n),D(x_n,x_{n+1})\Big\}=D(x_n,x_{n+1})$ thì từ (2.6) ta có $D(x_n,x_{n+1})\leq \alpha D(x_n,x_{n+1})$. Vì $\alpha\in[0,\dfrac{1}{K})$ nên

$$D(x_n,x_{n+1})=0. \tag{2.7}$$

Ngược lại, với mọi $n=1,2,3,\dots$ ta có $\max\Big\{D(x_{n-1},x_n),D(x_n,x_{n+1})\Big\}=D(x_{n-1},x_n)$. Khi đó, từ (2.6) ta có

$$D(x_n,x_{n+1})\leq \alpha D(x_{n-1},x_n). \tag{2.8}$$

Từ (2.7) và (2.8) ta có

$$D(x_n,x_{n+1})\leq \alpha D(x_{n-1},x_n), n=1,2,3,\dots$$

Suy ra

$$\begin{aligned} D(x_n,x_{n+1}) &\leq \alpha D(x_{n-1},x_n)\\ &\leq \alpha^2 D(x_{n-2},x_{n-1})\\ &\leq \dots\\ &\leq \alpha^n D(x_0,x_1). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Từ (2.9), bằng cách sử dụng Định nghĩa 1.1.(3) và $\alpha\in[0,\dfrac{1}{K})$, với mọi $m\geq n$ ta có

$$\begin{aligned} 0\leq D(x_n,x_m) &\leq K[D(x_n,x_{n+1})+\cdots+D(x_{m-1},x_m)]\\ &\leq K[\alpha^n D(x_0,x_1)+\cdots+\alpha^{m-1}D(x_0,x_1)]\\ &= K(\alpha^n+\cdots+\alpha^{m-1})D(x_0,x_1)\\ &= K\frac{\alpha^n(1-\alpha^{m-n})}{1-\alpha}D(x_0,x_1)\\ &\leq K\frac{\alpha^n}{1-\alpha}D(x_0,x_1). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Cho $m,n\to\infty$ trong (2.10) ta có $\lim\limits_{m,n\to\infty} D\left(x_n,x_m\right)=0$. Vậy $\{x_n\}$ là một dãy Cauchy. Vì (X,D,K) đầy đủ nên tồn tại x^* sao cho

$$\lim_{x\to\infty} x_n=x^* \tag{2.11}$$

và do đó

$$\lim_{n\to\infty} D(x_n,x^*)=0. \tag{2.12}$$

Khi đó, bằng cách thay $x=x_n, y=x^*$ trong (2.1) và sử dụng Định nghĩa 1.1.(3), ta có

$$\begin{aligned}
D(x^*, Tx^*) &\leq K[D(x^*, Tx_n) + D(Tx_n, Tx^*)] \\
&= KD(x^*, Tx_n) + K[\alpha M(x_n, x^*) + LD(x^*, Tx_n)] \\
&= KD(x^*, Tx_n) + K\alpha \max\Big\{D(x_n, x^*), D(x_n, Tx_n), \\
&\quad D(x^*, Tx^*), \frac{D(x_n, Tx^*) + D(x^*, Tx_n)}{2K}, D(T^2x_n, Tx_n), \\
&\quad D(T^2x_n, x^*), D(T^2x_n, Tx^*), \frac{D(T^2x_n, x_n) + D(T^2x_n, Tx^*)}{2K}\Big\} \\
&\quad + KLD(x^*, Tx_n) \\
&= KD(x^*, x_{n+1}) + K\alpha \max\Big\{D(x_n, x^*), D(x_n, x_{n+1}), \\
&\quad D(x^*, Tx^*), \frac{D(x_n, Tx^*) + D(x^*, x_{n+1})}{2K}, D(x_{n+2}, x_{n+1}), \\
&\quad D(x_{n+2}, x^*), D(x_{n+2}, Tx^*), \frac{D(x_{n+2}, x_n) + D(x_{n+2}, Tx^*)}{2K}\Big\} \\
&\quad + KLD(x^*, x_{n+1}). \qquad (2.13)
\end{aligned}$$

Cho $n \to \infty$ trong (2.13) và sử dụng (2.11), (2.12) và tính liên tục của D, ta có

$$\begin{aligned}
D(x^*, Tx^*) &\leq K0 + K\alpha \max\Big\{0, 0, D(x^*, Tx^*), \frac{D(x^*, Tx^*) + 0}{2K}, \\
&\quad 0, 0, D(x^*, Tx^*), \frac{0 + D(x^*, Tx^*)}{2K}\Big\} + KL0 \\
&= K\alpha D(x^*, Tx^*). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Vì $K\alpha \in [0, 1)$ nên từ (2.14) ta có $D(x^*, Tx^*) = 0$ hay $x^* = Tx^*$. Vậy $x^* \in \text{Fix(T)}$ hay $\text{Fix(T)} \neq \emptyset$.

(2). Từ (2.11) ta có $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$ với $x^* \in \text{Fix(T)}$.

(3). Từ Định nghĩa 1.1.(3) và (2.9), với $n = 1, 2, 3, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots$ và $m \geq n + i - 1$, ta có

$$\begin{aligned}
D(x_{n+i-1}, x_m) &\leq K[D(x_{n+i-1}, x_{n+i}) + \cdots + D(x_{m-1}, x_m)] \\
&\leq K[\alpha^i D(x_{n-1}, x_n) + \cdots + \alpha^{m-n} D(x_{n-1}, x_n)] \\
&= K(\alpha^i + \cdots + \alpha^{m-n}) D(x_{n-1}, x_n) \\
&= K\frac{\alpha^i(1 - \alpha^{m-n-i+1})}{1 - \alpha} D(x_{n-1}, x_n) \\
&\leq \frac{K\alpha^i}{1 - \alpha} D(x_{n-1}, x_n). \qquad (2.15)
\end{aligned}$$

Cho $m \to \infty$ trong (2.15), sử dụng (2.11) và tính liên tục của D, ta có

$$D(x_{n+i-1}, x^*) \leq \frac{K\alpha^i}{1 - \alpha} D(x_{n-1}, x_n).$$

□

Tiếp theo, chúng tôi mở rộng [3, Theorem 2.3] sang không gian kiểu-mêtric như sau.

2.2 Định lí. *Giả sử (X, D, K) là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ thỏa mãn*

1. *D liên tục.*
2. *Tồn tại $\alpha \in [0, \frac{1}{K})$ và $L \geq 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$D(Tx, Ty) \leq \alpha M(x, y) + L \min \{D(x, Tx), D(y, Tx)\}. \tag{2.16}$$

Khi đó

1. *T có duy nhất điểm bất động, nghĩa là* $\mathrm{Fix(T)} = \{x^*\}$.
2. *Với mọi $x_0 \in X$, dãy lặp Picard $\{x_n\}$ được cho bởi* (2.2) *hội tụ về x^*.*
3. *Ước lượng sau xảy ra*

$$D(x_{n+i-1}, x^*) \leq \frac{K\alpha^i}{1-\alpha} D(x_{n-1}, x^*), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, i = 0, 1, 2 \ldots \tag{2.17}$$

4. *Tốc độ hội tụ của dãy lặp Picard được cho bởi*

$$D(x_n, x^*) \leq \alpha D(x_{n-1}, x^*), \quad n = 1, 2, 3 \ldots \tag{2.18}$$

Sau đây, chúng tôi trình bày một số hệ quả và ví dụ minh họa cho những kết quả đạt được.

2.3 Hệ quả. *Giả sử (X,d) là một không gian mêtric đầy đủ và $T : X \longrightarrow X$ là một ánh xạ thỏa mãn*

1. *Tồn tại $\alpha \in [0, 1)$ và $L \geq 0$ sao cho với mọi $x, y \in X$,*

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha M_d(x, y) + Ld(y, Tx). \tag{2.19}$$

Ở đây

$$\begin{aligned} M_d(x, y) \ &= \ \max \Big\{ d(x, y), d(x, Tx), d(y, Ty), \frac{d(x, Ty) + d(y, Tx)}{2}, \\ &\quad d(T^2x, Tx), d(T^2x, y), d(T^2x, Ty), \frac{d(T^2x, x) + d(T^2x, Ty)}{2} \Big\}. \end{aligned}$$

Khi đó

1. $\mathrm{Fix(T)} \neq \emptyset$.
2. *Với mọi $x_0 \in X$, dãy lặp Picard $\{x_n\}$ được cho bởi* (2.2) *hội tụ về x^*.*
3. *Ước lượng sau xảy ra*

$$d(x_{n+i-1}, x^*) \leq \frac{\alpha^i}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x_n), \quad n = 1, 2, 3 \ldots, i = 0, 1, 2 \ldots$$

2.4 Hệ quả. *Giả sử* (X, d) *là một không gian mêtric đầy đủ và* $T : X \longrightarrow X$ *là một ánh xạ thỏa mãn tồn tại* $\alpha \in [0, 1)$ *và* $L \geq 0$ *sao cho với mọi* $x, y \in X$,

$$d(Tx, Ty) \leq \alpha M_d(x, y) + L \min \{d(x, Tx), d(y, Tx)\}. \tag{2.20}$$

Khi đó

1. *T có duy nhất điểm bất động.*
2. *Với mọi* $x_0 \in X$, *dãy lặp Picard* $\{x_n\}$ *được cho bởi (2.2) hội tụ về* x^*.
3. *Ước lượng sau xảy ra*

$$d(x_{n+i-1}, x^*) \leq \frac{\alpha^i}{1-\alpha} d(x_{n-1}, x^*), \quad n = 1, 2, 3, \ldots, i = 0, 1, 2, \ldots \tag{2.21}$$

4. *Tốc độ hội tụ của dãy lặp Picard được cho bởi*

$$d(x_n, x^*) \leq \alpha d(x_{n-1}, x^*), \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2.22}$$

Hệ quả 2.3 và Hệ quả 2.4 lần lượt là mở rộng của [3, Theorem 2.3] và [3, Theo rem 2.4]. Ví dụ sau đây cho thấy Định lí 2.1 là mở rộng của Hệ quả 2.3.

2.5 Ví dụ. Cho $X = \{0, 1, 2\}$ với D xác định như sau

$$D(x, y) = \begin{cases} 0 \text{ nếu } \ x = y \\ 4 \text{ nếu } \ (x, y) \in \{(1, 2), (2, 1)\} \\ 1 \text{ trong trường hợp còn lại.} \end{cases}$$

và $T : X \longrightarrow X$ xác định bởi $T0 = T1 = T2 = 0$. Khi đó

1. $(X, D, 2)$ là một không gian kiểu-mêtric đầy đủ.
2. Các giả thiết của Định lí (2.1) được thỏa mãn.
3. (X, D) không là không gian mêtric.

Chứng minh. (1). Từ công thức của D ta suy ra điều kiện (1), (2) trong Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn. Ta kiểm tra điều kiện thứ (3).

Nếu $D(x, y) = 0$ thì với mọi $x, z_1, \ldots, z_n, y \in X$. Khi đó

$$D(x, y) = 0 \leq [D(x, z_1) + D(z_1, z_2) + \cdots + D(z_n, y).$$

Nếu $D(x, y) = 1$ thì $D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y) \geq 1$. Khi đó

$$D(x, y) \leq D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y).$$

Nếu $D(x, y) = 4$ thì $D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y) \geq 2$.Khi đó

$$D(x, y) \leq 2[D(x, z_1) + \cdots + D(z_n, y)].$$

Do đó điều kiện (3) trong Định nghĩa 1.1 được thỏa mãn với $K = 2$. Do đó $(X, D, 2)$ là một không gian kiểu-mêtric.

Tiếp theo ta chứng minh $(X, D, 2)$ là đầy đủ

Giả sử $\{x_n\}$ là một dãy *Cauchy*, ta chứng minh $\{x_n\}$ hội tụ. Vì $\{x_n\}$ là một dãy *Cauchy* nên $\lim\limits_{m,n\to\infty} D(x_n, x_m) = 0$. Do đó, tồn tại n_0 sao cho $D(x_n, x_m) < 1$ với mọi $m, n \geq n_0$. Suy ra $D(x_n, x_m) = 0$ hay $x_n = x_m$ với mọi $n, m \geq n_0$. Vậy $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_{n_0}$. Suy ra $(X, D, 2)$ đầy đủ.

(2).Trước hết, ta chứng minh D liên tục. Giả sử $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ và $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Khi đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, x) = \lim\limits_{n\to\infty} D(y_n, y) = 0$. Do đó tồn tại n_0 sao cho $D(x_n, x) < 1$ và $D(y_n, y) < 1$, với mọi $n \geq n_0$. Từ công thức của D suy ra $D(x_n, x) = D(y_n, y) = 0$ hay $x_n = x, y_n = y$ với mọi $n \geq n_0$. Từ đó suy ra $D(x_n, y_n) = D(x, y)$ với mọi $n \geq n_0$. Do đó $\lim\limits_{n\to\infty} D(x_n, y_n) = D(x, y)$. Vậy D liên tục.

Mặt khác, $D(Tx, Ty) = 0$ nên (2.1) được thỏa mãn.

(3). (X, D) không là không gian mêtric. Thật vậy, với $x = 1, y = 2$, ta có

$$D(1, 2) = 4 \geq D(1, 0) + D(0, 2) = 1 + 1 = 2.$$

Do đó (X, D) không là không gian mêtric. □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. R. P. Agarwal, M. Meehan, and D. O'Regan, *Fixed point theory and applications*, Cambridge University Press, 2004.

2. H. Q. Ái, *Về định lí điểm bất động của lớp ánh xạ Meir-Keeler α-co trên không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

3. V. Berrinde, *Some remarks on a fixed point theorem for Ćiríc-type almost contractions*, Carpathian J. Math. 24 (2009), no. 2, 157–162.

4. N. V. Dung, N. T. Hieu and N. T. T. Ly, *Generalizations of Berinde-type contraction*, preprint (2015).

5. P. Kumam and et al, *A new generalization of Ćiríc fixed point theorem*, arXiv:1309.5589v2, (2013).

6. M. A. Khamsi and N. Hussain , *KKM mappings in metric type space*, Nonlinear Anal. **7** (2010), 3123-3129.

7. M. A. Khamsi, *Remarks on cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings*, Fixed Point Theory Appl. **2010**(2010), 1-7.

8. N. T. A. Nguyệt, *Định lí điểm bất động cho hai ánh xạ thoả mãn điều kiện (B) suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.

9. B. E. Rhoades, *Some theorems on weakly contractive maps*, Nonlinear Anal. **47** (2001) 2683–2693.

10. N. C. Tâm, *Về định lí điểm bất động cho dạng φ-co yếu suy rộng trong không gian kiểu-mêtric*, Đề tài nghiên cứu khoa học của sinh viên, Trường Đại học Đồng Tháp, 2014.